**УДК 681.3, 004.62**

**Чернега В. В., Наконечний Р. А.**

Національний університет "Львівська політехніка"

кафедра електронних обчислювальних машин

**Аналіз методів та засобів частотно-часових перетворень сигналів**

*© Чернега В.В., Наконечний Р. А., 2020*

**Метою даної роботи є аналіз основних методів та засобів частотно-часових перетворень сигналів. В статті приведено основні методи аналізу сигналів.**

**Ключові слова: частотно-часовий аналіз, перетворення Фур’є, вейвлет-перетворення**

**Analysis of methods and means of frequency-time transformations of signals**

**The purpose of this work is to analyze the basic methods and means of frequency-time transformations of signals. The main methods of signal analysis are given in the article.**

**Keywords: frequency-time analysis, Fourier transform, wavelet transform**

**Вступ**. Матеріальним носієм інформації щодо стану об’єктів є сигнали, класифікація яких досить повно розглянута в роботі [1]. Як правило, на сьогодні, на підставі теореми відліків [2, 3] сигнали представляються в дискретному вигляді. У цьому випадку впорядкована послідовність результатів вимірювань сигналу, зафіксованих в послідовні моменти часу, прийнято називати часовим рядом. Можна виділити три основні завдання, які вирішуються під час аналізу часових рядів [4]:

1. Визначення кількісних характеристик процесу, який породив цей часовий ряд, в тому числі частотно-часових характеристик сигналу, його енергії та інші;
2. Декомпозиція часового ряду на елементарні складові для подальшого вивчення їх кількісних характеристик;
3. Кількісне порівняння часових рядів для виявлення подібностей і відмінностей між процесами, якими вони породжені.

**Аналіз існуючих методів**. Перехід до спектру може здійснюватися з використанням ортогональних і унітарних перетворень. Найбільш часто для отримання спектру використовується розкладання по ортогональних функціях [7]. Наприклад, спектри, отримані на основі розкладання в ряд Фур’є (у разі гармонійного базису), ряд Уолша (у разі використання негармонійної ортогональної системи прямокутних функцій зі значеннями ±1), вейвлет-перетворення тощо. У всякому разі розкладання вихідної неперервної функції на ортогональні функції може бути представлено у вигляді:

де – коефіцієнти розкладання, – система базисних ортогональних функцій. До того ж неперервної функції відповідатиме дискретний (лінійчатий) спектр з коефіцієнтами. У дискретному випадку функція відліків має вигляд:

– коефіцієнти розкладання, – ортогональна система дискретних функцій.

Найважливішим питанням у випадку розкладання функції по ортогональному базису залишається вибір раціональної системи *.* Вирішення цього питання залежить від поставленого завдання. Так під час аналізу і синтезу сигналів, що впливають на лінійні ланцюги, найбільшого поширення набула система гармонійних функцій, яка традиційно розглядається в радіотехніці. Під час розв’язання задачі наближеного розкладання складних сигналів з необхідною точністю при мінімумі членів ряду для представлення безперервних сигналів застосовуються поліноми і функції Лагерра, Лежандра, Чебишева, Ерміта тощо. Для представлення сигналів з точками розриву використовуються кусково-постійні функції Уолша, Хаара, Радемахера. Для дискретизації безперервних сигналів у часі використовується ортогональний ряд Котельникова. Останніми роками для аналізу часових рядів широко використовуються базисні функції типу вейвлетів.

**Перетворення Фур’є (Fourier Transform).** У 1882 році Жозеф Фур’є (Joseph Fourier) довів, що довільну періодичну функцію можна розкласти у ряд періодичних комплексних експоненціальних функцій. Пізніше таке перетворення було узагальнено і на неперіодичні функції. Перетворення Фур’є сигналу s(t) має вигляд



Комплексна функція S(ω) називається комплексним спектром сигналу і показує набір коливальних компонент сигналу. Знання спектрального складу сигналів є дуже важливим у багатьох областях. Однак перетворення Фур’є має і істотні недоліки. При перетворенні сигналу у частотну область втрачається залежність його властивостей від часу.

**Короткотермінове перетворення Фур’є (Short Time Fourier Transform).** Для подолання недоліків перетворення Фур’є була запропонована його модифікація, яка дістала назву короткотермінове перетворення Фур’є. Ця модифікація полягає у тому, що сигнал s(t) перемножується на вагову функцію w(t), яка ковзає вздовж сигналу, зміщуючись у часі



Тепер спектр сигналу показує не тільки склад його частотних компонент, а й зміну його характеристик з плином часу.

Вагова функція має скінчену тривалість у часі. Тривалість Т вагової функції визначає роздільну здатність короткотермінового аналізу за часом ΔТ і частотну роздільну здатність Δω, оскільки вони зв’язані перетворенням Фур’є. Відповідно до принципу невизначеності добуток роздільних здатностей аналізу можна поліпшувати до певної межі ΔT ×Δω ≤1 4π .

Оскільки тривалість вагової функції w(t) не змінюється під час аналізу, то роздільні здатністі короткотермінового перетворення Фур’є як по часу ΔТ , так і по частоті Δω, є незмінними. Така властивість є недоліком короткотермінового перетворення Фур’є, тому що у багатьох предметних областях доцільно використовувати керовані роздільні здатності.

**Обмеженість застосування Фур'є-перетворення** Класичне перетворення Фур'є, як було зазначено раніше, виявляється малоефективним для роботи з нестаціонарними сигналами, для функцій з локальними особливостями, зокрема для імпульсних та цифрових сигналів і зображень. Це пов'язано з тим, що базисна функція рядів Фур'є – синусоїда, визначена на просторі від -∞ до + ∞ і за своєю природою є гладкою і суворо періодичною функцією. Така функція на практиці (в умовах обмеження числа членів ряду або спектра розкладу) принципово не здатна описувати довільні сигнали та функції. З позиції точного уявлення перетворенням Фур'є довільних сигналів і функцій можна відзначити цілий ряд його недоліків [1]:

– непридатність до аналізу нестаціонарних сигналів;

– перетворення Фур'є навіть для однієї заданої частоти вимагає знання сигналу не тільки в минулому, але і в майбутньому, що є теоретичною абстракцією;

– в умовах практично неминучого обмеження числа гармонік або спектра коливань точне відновлення сигналу після прямого і зворотного перетворення Фур'є теоретично (і звичайно практично) неможливо, зокрема, через прояви ефекту Гіббса;

– базисною функцією при розкладанні в ряд Фур'є є гармонійне (синусоїдальне) коливання, яке математично визначено в інтервалі часу від -∞ до + ∞ і має незмінні в часі параметри;

– чисельне інтегрування в часовій області від -∞ до + ∞ при прямому перетворенні Фур'є і від -∞ до + ∞ в частотної області при зворотному перетворенні Фур'є зустрічає великі обчислювальні труднощі;

– окремі особливості сигналу (наприклад, розриви або піки) викликають незначні зміни частотного образу сигналу на всьому інтервалі частот від -∞ до + ∞, які «розмазуються» по всій частотній осі, що робить їх виявлення за спектром практично неможливим;

– синусоїда, як плавна базисна функція, в принципі не може представляти перепади сигналів з нескінченною крутизною, хоча такі сигнали (наприклад, прямокутні імпульси) застосовуються досить широко;

– єдиним пристосуванням до подання швидких змін сигналів, таких як піки або перепади, є різке збільшення числа гармонік, які впливають на форму сигналу і за межами локальних особливостей сигналу; – за складом вищих складових спектра практично неможливо оцінити місце розташування особливостей на часовій залежності сигналу і їх характер;

– для нестаціонарних сигналів труднощі прямого перетворення Фур'є і зворотного перетворення Фур'є (і, відповідно, швидкого перетворення Фур'є) багаторазово зростають.

**Вейвлет-перетворення (Wavelet transform)** є прогресивним засобом аналізу нестаціонарних сигналів з широким застосуванням в області діагностики. Вейвлет-перетворення є ефективним математичним засобом локалізації та класифікації особливих точок нестаціонарних сигналів і дозволяє проводити аналіз сигналу одночасно в частотній та часовій областях. Завдяки своїй гнучкості та ефективним обчислювальним реалізаціям вейвлети стали одним з найбільш вживаних методів частотно-часового аналізу сигналів. Однак найчастіше на практиці вейвлет-аналіз сигналів виконується без урахування особливостей налаштування вейвлетів, які суттєво впливають на результати перетворення та можливість їх правильної інтерпретації. Застосування вейвлет-перетворення без урахування частотних характеристик вейвлета може давати спотворену інформацію про особливості сигналу, що аналізується. Такий підхід може призвести до неуніверсальності розроблюваних методів в силу того, що при зміні характеристик досліджуваного сигналу застосування одних і тих же налаштувань методу може давати абсолютно непередбачувані результати. Для успішного використання вейвлет-перетворення потрібен ретельний аналіз параметрів материнського вейвлета. Це дозволить гнучко керувати 30 налаштуванням вейвлета для здобуття необхідних властивостей аналізу вейвлетперетворення і правильно інтерпретувати одержувані результати. Таким чином, вейвлети мають явні переваги перед рядами Фур'є, як в загальному і точному поданні функцій так і їх різноманітних локальних особливостях. Вони представлені набагато більш різноманітним набором типів базових функцій, ніж єдина синусоїдальна функція в рядах Фур'є. Ця різноманітність вейвлетів, з одного боку, різко розширює коло розв'язуваних з їх допомогою завдань, а з іншого боку, робить таке рішення творчим.

Поняття вейвлетів було визначено на початку вісімдесятих, синтез ідей, що виникли протягом останніх тридцяти років в техніці, фізиці та чистої математики.

На відміну від перетворення Фур'є, вейвлет-аналіз дозволяє виділяти одночасно як частотну, так і часову компоненти мінливості, тобто дає можливість аналізувати часову зміну частотного спектра процесу. Таким чином, аналіз та обробка нестаціонарних (в часі) або неоднорідних (в просторі) сигналів різних типів представляють основну область застосування вейвлет-аналізу. Вейвлет-перетворення має рухоме частотно-часове вікно, яке самостійно налаштовується, та однаково добре виявляє як низькочастотні так і високочастотні характеристики сигналу на різних часових масштабах. Вейвлетфільтри дозволяють не тільки боротися з шумами, але і виділяти необхідні компоненти сигналу. Оскільки вейвлети мають добру частотно-часову адаптацію, вони можуть служити зручним інструментом для дослідження частотних характеристик нестаціонарного сигналу.

У вейвлет-аналізі у якості опорних використовуються коливальні функції скінченої тривалості і нульовим середнім значенням, які дістали назву вейвлетів (англ. wavelet — маленька хвиля) [4].

Вейвлет-перетворення сигналу x(t) описується співвідношенням



де  — опорна вейвлет-функція; ψ(t) — материнська функція; τ, s — параметри масштабування і зсуву. Опорні функції вейвлет-аналізу — вейвлети отримують розтягуванням (стискуванням) і зміщенням у часі основної опорної функції, так званої материнської функції (англ. mother function).

**Перетворення Уігнера (Wigner Distribution).** Перетворення Уіґнера сигналу s(t) визначається формулою



Перетворення Уіґнера є нелінійним перетворенням сигналу і тому забезпечує високу частотно-часову роздільну здатність, але частотно-часове представлення багатокомпонентних сигналів містить перехресні складові (англ. 446 cross-terms), обумовлені нелінійним характером перетворення. Ці складові знижують роздільну здатність, затемнюють корисний сигнал і тим самим утруднюють правильну інтерпретацію отриманих даних.

**Перетворення Гільберта-Хуанга (Hilbert-Huang Transform).** Перетворення Гілберта-Хуанга складається з двох етапів. На першому етапі за допомогою метода емпіричної декомпозиції мод (Empirical Mode Decomposition) сигнал розкладається на складові, які називаються власними внутрішніми коливаннями (Intrinsic Mode Function (IMF)). Після цього, на другому етапі за допомогою перетворення Гілберта на їх основі визначається спектр сигналу у частотно-часовій області. Власні внутрішні коливання, на які розкладається аналізований сигнал, мають відповідати таким вимогам:

* кількість екстремумів і кількість переходів через нуль мають бути або однаковими, або відрізнятися не більше, ніж на одиницю;
* обвідна кожного власного внутрішнього коливання має нульове середнє значення у будь-якій точці.

Перетворення Гілберта кожного власного внутрішнього коливання, яке здійснюється на другому етапі перетворень, визначається формулою



де P — головне значення інтеграла Коші (Cauchy principal value). На основі перетворення Гілберта y(t) сигналу x(t) отримуємо аналітичний сигнал



де



Функцію a(t) називають миттєвою амплітудою, а ϕ(t) — миттєвою фазою

**Висновки:** Наведені основні методи частотно-часового аналізу сигналів. Приведені недоліки застосування Фур'є-перетвореннь.

**Список використаних джерел**

1. Хорошко В. О. Пошук та локалізація радіозакладних пристроїв : навчальний посібник / В. О. Хорошко,

О. Д. Азаров, Максименко Г. О., Яремчук Ю. Є ; ВНТУ. – Вінниця, 2007. – 333 с.

2. Бартків Н. І. Методи та локалізація джерел несанкціонованого випромінювання / Н. І. Бартків,

І. М. Коротєєв // Захист інформації. – 2009. – № 3. – С. 68–73.

3. Иванов М. А. Применение вейвлет-преобразований в кодировании изображений / М. А. Иванов //

Новые информационные технологии в науке и образовании. – 2004. – №24. – С. 157–175.

4. Д’яконов В., Авраменкова І. Обработка сигналов и изображений / В. Д’яконов, І. Авраменкова //

Специальный справочник. – Спб.: Питер, 2002. – 608 с.

5. Кобелев В.Ю. Выбор оптимальных вейвлетов для обрабоки сигналов и изображений / В. Ю.Кобелев,

А. В. Ласточкин // Труды 2-й международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее приминения».-

М., 1999 – Т.2. – С. 514 – 518.

6. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразование / А. Н. Яковлев // Учебное пособие. – Новосибирск:

изд-во НГТУ, 2003. –104 с.

7. Проценко М. М. Методика вибору вейвлет-функції для обробки цифрових сигналів / М. М. Проценко //

Вісник ЖДТУ. – Житомир, ЖДТУ, 2009. – №49. – С.97-100.